FAST-EINFACHE GRUPPEN MIT LANGEN BAHNEN IN ABSOLUT IRREDUZIBLER OPERATION

GUNTER MALLE

Gewidmet Bernd Fischer aus Anlass seines 70. Geburtstages

ZUSAMMENFASSUNG. Wir bestimmen alle absolut irreduziblen Operationen quasi-einfacher Gruppen auf endlichen Vektorräumen in nicht-definierender Charakteristik mit einer langen Bahn und alle solchen Operationen mit wenigen Bahnen. Insbesondere erhalten wir damit alle koprimen Operationen quasi-einfacher Gruppen mit wenigen Bahnen. In definierender Charakteristik klassifizieren wir alle irreduziblen Darstellungen einfacher algebraischer Gruppen mit einer Bahn der Kodimension höchstens 1 auf dem zugehörigen projektiven Raum.

1. EINLEITUNG

Diese Arbeit ist motiviert durch das Resultat von Héthelyi und Külshammer [9], dass eine auflösbare Gruppe mit durch die Primzahl p teilbarer Ordnung mindestens $2\sqrt{p-1}$ Konjugiertenklassen (also auch mindestens ebensoviele irreduzible Charaktere) besitzt. Eine einfache Überlegung zeigt, dass ein minimales Gegenbeispiel H zu der analogen Aussage für beliebige endliche Gruppen einen eindeutig bestimmten Normalteiler N hat, für den zudem die Faktorgruppe $G := H/N$ zu p prime Ordnung besitzt. Der Fall, dass N ein direktes Produkt nicht-abelsch einfacher Gruppen ist, lässt sich mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ausschließen (siehe Satz 2.1), so dass die Situation verbleibt, in der die p'-Gruppe G koprim und irreduzibel auf dem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum N operiert. Wie im auflösbaren Fall scheint hier der schwierigste Fall vorzuliegen, wenn diese Operation imprimitiv ist. Andernfalls kann man darauf reduzieren, dass G eine nahezu einfache Gruppe in irreduzibler koprimer Operation ist. Diese Situation wird hier mit Hilfe der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen untersucht und zu einem Widerspruch geführt indem wir zeigen, dass ein solches G in den meisten Fällen bereits mindestens $2\sqrt{p-1}$ Bahnen auf N hat.

Dabei schwächen wir die Voraussetzungen noch in folgender Weise ab. Zunächst lassen wir auch nicht koprime Operation zu. Des weiteren ersetzen wir die Schranke $2\sqrt{p-1}$ durch q, wenn N als absolut irreduzibler $\mathbb{F}_qG$-Modul aufgefasst werden kann. Hat die Operation höchstens q Bahnen auf N, so muss mindestens eine davon sehr groß sein. Daher klassifizieren wir als allgemeinste Situation zunächst diejenigen absolut irreduziblen Moduln nahezu einfacher Gruppen in nicht definierender Charakteristik, die eine lange Bahn auf dem zugrundeliegenden Vektorraum besitzen (Satz 3.4). In definierender Charakteristik betrachten wir die eng verwandte

Date: 13. Februar 2006.

Frage, welche irreduziblen Moduln einfacher algebraischer Gruppen eine Bahn der Kodimension höchstens 1 auf der Menge der Geraden besitzen (Satz 4.8).

Antworten auf die Frage nach höchstens $q-1$ Bahnen (Satz 5.1) sowie nach weniger als $2\sqrt{p-1}$ Bahnen in koprimer Charakteristik (Satz 5.2) folgen aus dem vorigen Resultat auf einfache Weise. Als weitere Folgerung bestimmen wir noch diejenigen quasi-einfachen Gruppen, die auf einem absolut irreduziblen Modul dieselben Bahnen wie eine umfassende klassische Gruppe besitzen (Satz 6.1).

Ähnliche Fragestellungen sind bereits in früheren Arbeiten untersucht worden. Im Fall $p = 2$ etwa fragen wir nach transitiven Operationen nahezu einfacher Gruppen auf den nichttrivialen Vektoren; dies wurde schon von Hering [8] klassifiziert. Der Fall von genau zwei Bahnen wurde von Liebeck [16] behandelt. Külshammer [15] hat unter anderem gezeigt, dass einfache Gruppen in koprimer Operation mit beschränkter Bahnenanzahl beschränkte Ordnung haben. Die Bestimmung langer Bahnen für Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik steht, wie wir sehen werden, in engem Zusammenhang mit der Klassifikation von Moduln für algebraische Gruppen mit nur endlich vielen Bahnen, sogenannten prähomogenen Vektorräumen (siehe Guralnick–Liebeck–Macpherson–Seitz [7]). Schließlich sei erwähnt, dass die Abschätzung der Klassenzahl eines semidirekten Produkts $N.G$ wie oben eine wichtige Rolle in Brauers $k(GV)$-Problem spielt (siehe etwa [6, 14]).

2. Klassenanzahlen bei nicht-abelschem Sockel

In diesem Abschnitt untersuchen wir die mögliche Struktur endlicher Gruppen mit wenigen Konjugiertenklassen im Sinne von [9]. Sei dazu G ein minimales Gegenbeispiel zu der Aussage:

(∗) Für jeden Teiler p von $|G|$ hat G mindestens $2\sqrt{p-1}$ Konjugiertenklassen.

Sei N ein nichttrivialer Normalteiler von G. Da die Faktorgruppe G/N sicherlich höchstens ebensoviele Klassen wie G hat, muss G/N wegen der Minimalität von G zu p prime Ordnung haben. Da dies für jeden nichttrivialen Normalteiler gilt, besitzt G einen einzigen minimalen Normalteiler N, und $|G/N|$ ist prim zu p. Da wir zudem annehmen können, dass p der größte Primteiler von $|G|$ ist, wird G/N nur von Primzahlen kleiner als p geteilt.

Es bleiben somit zwei Fälle zu untersuchen. Der eindeutige minimale Normalteiler ist entweder direktes Produkt nicht-abelsch einfacher Gruppen, oder er ist ein irreduzibler $\mathbb{F}_p$-Modul für die Faktorgruppe G/N. Wir zeigen zunächst mit der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, dass der erste Fall nicht auftreten kann. Die restliche Arbeit ist dann dem Studium eines Spezialfalls der zweiten Situation gewidmet.

Satz 2.1. *Sei G ein minimales Gegenbeispiel zu der Aussage (*). Dann ist der einzige minimale Normalteiler N von G eine elementar-abelsche p-Gruppe, und $|G/N|$ ist nur durch Primzahlen kleiner als p teilbar.*

Beweis. Wir müssen ausschließen, dass N direktes Produkt nicht-abelsch einfacher Gruppen ist. Mit $k(H)$ bezeichnen wir die Anzahl der Konjugiertenklassen einer endlichen Gruppe H, und mit $k^*(H)$ die Anzahl der $\mathrm{Aut}(H)$-Bahnen von Konjugiertenklassen von H. Damit gilt offensichtlich: hat G einen nicht-abelsch einfachen Kompositionsfaktor S, so ist $k(G) \geq k^*(S)$ (siehe etwa [20, Lemma 2.5]). Um eine einfache Gruppe S als möglichen Kompositionsfaktor auszuschließen reicht es daher zu zeigen, dass

$$k^*(S) \geq 2\sqrt{p-1}$$

für alle Primteiler p von S ist. Für die sporadischen Gruppen, und allgemeiner für alle Gruppen im Atlas [3] ist die Überprüfung der gewünschten Ungleichung eine einfache Übung.

Die Klassenanzahl $k^*(\mathfrak{A}_n)$ der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist mindestens gleich $\pi(n-2)$, wobei $\pi(m)$ die Anzahl der Partitionen von m bezeichnet. Offensichtlich gilt $\pi(m) \geq m$, während die Primteiler von $|\mathfrak{A}_n|$ durch n beschränkt sind. Dies liefert die gewünschte Abschätzung für $n \geq 7$.

Gruppen H vom Lie-Typ vom Rang r über dem Körper $\mathbb{F}_q$ haben nach [1, Th. 3.7.6] mindestens q^r halbeinfache Konjugiertenklassen, somit hat $H/Z(H)$ mindestens $q^r/|Z(H)|$ Klassen. Die Primteiler von $|G|$ sind jedenfalls durch die Ordnung des größten maximalen Torus nach oben beschränkt, dieser wiederum hat höchstens $(q+1)^r$ Elemente. Damit ist für einfache Gruppen $S = H/Z(H)$ vom Lie-Typ zu überprüfen, ob $q^r \geq 2az\sqrt{(q+1)^r - 1}$ mit $a := |\mathrm{Out}(S)|$ und $z := |Z(H)|$ gilt. Für Gruppen kleinen Rangs kann man dies noch abschwächen, indem man die explizite Kenntnis der Konjugiertenklassen, der Operation von $\mathrm{Out}(S)$ oder der Teiler von $|H|$ benutzt. Es ergibt sich, dass die gewünschte Abschätzung nur für die Gruppen $\mathrm{L}_2(16)$, $\mathrm{L}_2(32)$ und ${}^2B_2(32)$ nicht erfüllt ist.

In den drei Ausnahmefällen ist noch $k^*(S) \geq 2\sqrt{p-1} - 2$. Nun ist aber klar, dass eine Gruppe, die S als Kompositionsfaktor mit nichttrivialem Normalisatorquotienten enthält, noch mindestens zwei Klassen außerhalb von S besitzen muss. Damit sind auch die drei letzten Gruppen ausgeschlossen. $\square$

Somit bleibt für ein minimales Gegenbeispiel zu (*) nur der Fall, dass G/N irreduzibel auf dem $\mathbb{F}_p$-Modul N operiert. In den folgenden Abschnitten werden wir den Spezialfall untersuchen (und dadurch ausschließen), dass G/N eine quasi-einfache verallgemeinerte Fitting-Untergruppe besitzt (siehe Folgerung 5.3).

3. Lange Bahnen

Seien $V \cong \mathbb{F}_q^d$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ und $G \leq \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Gruppe. Dies induziert eine Operation von $G/Z(G)$ auf den Punkten des zugehörigen projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$.

Wir sagen, dass G eine *lange Bahn auf* $\mathbb{P}(V)$ besitzt, falls mindestens eine der Bahnen von G auf $\mathbb{P}(V)$ die Länge $(q^{d-1}-1)/(q-1)$ hat. Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung aller absolut irreduziblen $\mathbb{F}_qG$-Moduln mit langen Bahnen für nahezu einfache Gruppen G in nicht-definierender Charakteristik. Der Fall von Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik ist von grundsätzlich anderer Natur und wird im nächsten Abschnitt angesprochen.

Dabei wollen wir sowohl $\mathfrak{A}_6 = \mathrm{S}_4(2)'$ als auch ${}^2F_4(2)'$ *nicht* als Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik 2 auffassen.

Anmerkung 3.1. Sei V ein absolut irreduzibler $\mathbb{F}_qG$-Modul mit einer G-invarianten quadratischen Form Q. Dann hat G mindestens so viele Bahnen auf $\mathbb{P}(V)$ wie die orthogonale Gruppe der Form Q, also zwei Bahnen für gerades q, drei Bahnen für ungerades q. Sind etwa q und $\dim V = 2n+1$ ungerade, so haben diese Bahnen die Längen $\frac{1}{2}q^n(q^n \pm 1), (q^{2n}-1)/(q-1)$. Eine lange Bahn B von G auf $\mathbb{P}(V)$ muss also

$$|B| \bigm| |G| \quad \text{und} \quad \frac{(q^{2n}-1)}{(q-1)} \leq |B| \leq \frac{1}{2}q^n(q^n+1)$$

erfüllen. Ähnliche Formeln ergeben sich in den übrigen Fällen. Dies führt auf folgendes einfache Kriterium, für welches wir nur $|G|$, q und $\dim(V)$ kennen müssen: Liegt in dem angegebenen Intervall kein Teiler der Gruppenordnung $|G|$, so hat G keine lange Bahn auf $\mathbb{P}(V)$. Insbesondere für $q = 2, 3$ sind diese Teilbarkeitsbedingungen sehr selten erfüllt.

Anmerkung 3.2. Sei V ein absolut irreduzibler $\mathbb{F}_qG$-Modul in koprimer Charakteristik, also $\mathrm{ggT}(q, |G|) = 1$. Dann kann der Permutationscharakter π von $G{\cdot}Z(\mathrm{GL}(V))$ auf V aus dem Brauer-Charakter von V berechnet werden: der Wert auf $g \in \mathrm{GL}(V)$ wird durch die Ordnung des Fixraums $|V^{\langle g\rangle}|$ gegeben, also durch $q^{m(g)}$ mit

$$m(g) = \text{ Anzahl der Eigenwerte 1 von } g.$$

Nach der Cauchy-Frobenius-Fixpunktformel ergibt sich die Bahnenanzahl dann als Skalarprodukt von π mit dem trivialen Charakter. Dies führt auf folgendes Kriterium, für das nur der Brauercharakter von G auf V benötigt wird: Ist die Bahnenanzahl von $G \cdot Z(\mathrm{GL}(V))$ auf V kleiner als q, so hat G eine lange Bahn auf $\mathbb{P}(V)$. Umgekehrt kann man auf diese Art und Weise unter Umständen auch bestimmte Untergruppen als Fixgruppen ausschließen, wenn nämlich ihr Permutationscharakter nicht Summand von π ist. Dies trifft insbesondere auf den Fall regulärer Bahnen zu.

Anmerkung 3.3. Die vorige Anmerkung überträgt sich nicht direkt auf den Fall nicht-koprimer Operation, da der Fixraum p-singulärer Elemente nicht durch den Brauercharakter bestimmt wird. Hat man aber etwa die Darstellung von G auf V explizit gegeben und kennt Vertreter aller p-singulären Konjugiertenklassen, so kann man daraus die fehlenden Werte des Permutationscharakters bestimmen und wie eben die Cauchy-Frobenius-Formel anwenden.

Wir erhalten folgende Klassifikation langer Bahnen, mit den zwei offenen Fällen in Teil (iii):

Satz 3.4. *Sei G eine endliche Gruppe mit quasi-einfacher verallgemeinerter Fitting-Untergruppe $F^*(G)$, und sei $V \cong \mathbb{F}_q^d$ ein absolut irreduzibler, treuer $\mathbb{F}_qG$-Modul, der nicht über einem echten Teilkörper von $\mathbb{F}_q$ definierbar ist. Hat G eine lange Bahn auf $\mathbb{P}(V)$, so gilt eines von:*

(i) *G ist vom Lie-Typ in Charakteristik $p|q$, oder*
(ii) *$d \leq 24$ und (G, d, q) sind wie in den Tabellen 1–3 angegeben, oder*
(iii) *$(G, d, q) \in \{(6.Suz, 12, 13), (2.Co_1, 24, 5)\}$.*

Umgekehrt existiert in den Fällen in (ii) immer eine lange Bahn.

Tabelle 1. Lange Bahnen für alternierende Gruppen

G	Out	d	q
$\mathfrak{A}_5$		3	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_5], q \leq 41$
$\mathfrak{A}_5$	2	4	$q = 3, 7$
$2.\mathfrak{A}_5$		2	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_5]$
$2.\mathfrak{A}_5$	2	4	$q = 7$
$2.\mathfrak{A}_5.2$		4	$q = 3, 7$
$\mathfrak{A}_6$	2_1	4	$q = 2$
$\mathfrak{A}_6$	2_1	5	$q = 5$
$2.\mathfrak{A}_6$		4	$q = 5, 7, 11, 13, 17$
$3.\mathfrak{A}_6$		3	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_5], q \leq 349$
$2.\mathfrak{A}_6.2_1$		4	$q = 7, 11, 13, 19, 23, 25$
$3.\mathfrak{A}_6.2_1$		6	$q = 2$
$3.\mathfrak{A}_6.2_1$	2^2	6	$q = 5$
$\mathfrak{A}_6.2_2$	2^2	8	$q = 2$
$3.\mathfrak{A}_6.2_3$		3	$q = 25$

G	Out	d	q
$\mathfrak{A}_7$		4	$q = 2$
$\mathfrak{A}_7$	2	5	$q = 7$
$\mathfrak{A}_7$	2	6	$q = 2$
$2.\mathfrak{A}_7$		4	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_7], q \leq 43$
$3.\mathfrak{A}_7$		3	$q = 25$
$3.\mathfrak{A}_7$		6	$q = 4$
$2.\mathfrak{A}_7.2$		4	$q = 7$
$3.\mathfrak{A}_7.2$		6	$q = 5$
$2.\mathfrak{A}_8$	2	8	$q = 3, 5$
$\mathfrak{A}_9$	2	7	$q = 3$
$\mathfrak{A}_9$		8	$q = 2$
$2.\mathfrak{A}_9$	2	8	$q = 3$
$2.\mathfrak{A}_9$		8	$q = 5, 7$
$\mathfrak{A}_{10}$	2	8	$q = 2, 5$
$2.\mathfrak{A}_{10}$		8	$q = 5$
$2.\mathfrak{A}_{12}$		16	$q = 3$

Hierbei bedeuten b_5, b_7 bzw. z_3 eine Wurzel in $\mathbb{F}_q$ von x^2+x-1, von x^2+x+2 bzw. von x^2+x+1. In der Spalte Out ist angegeben, welche äußeren Automorphismen die jeweilige Darstellung invariant lassen und damit zu Gruppenerweiterungen mit langen Bahnen führen.

Beweis. Sei $G \leq \mathrm{GL}_d(q)$ absolut irreduzibel. Hat G in der Operation auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)$ eine Bahn der Länge mindestens $(q^{d-1}-1)/(q-1)$, so gilt also

$$|G/Z(G)| \geq (q^{d-1}-1)/(q-1),$$

und daher

$$d \leq \log_q |G/Z(G)| + 2.$$

Eine Darstellung von G, die die Voraussetzung des Satzes erfüllt, muss daher von kleiner Dimension sein. Dies liefert den Schlüssel zur Bestimmung der Fälle in Teil (ii).

Sei nun G wie in der Voraussetzung, mit einzigem nicht-abelsch einfachem Kompositionsfaktor $S = F^*(G)/Z(F^*(G))$, und $V \cong \mathbb{F}_q^d$ ein absolut irreduzibler, treuer $\mathbb{F}_qG$-Modul, der nicht (i) erfüllt. Wir behandeln die Möglichkeiten für S gemäß der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Sei zunächst S sporadisch. Aus der Kenntnis minimaler Darstellungsgrade von Überlagerungsgruppen sporadischer Gruppen (siehe Jansen [11]) und obiger Ungleichung folgt, dass S jedenfalls keine der Gruppen

$$He, ON, HN, Ly, Th, Fi_{23}, J_4, Fi_{24}, B, M$$

sein kann; für die restlichen 15 Gruppen erhalten wir obere Schranken für die Darstellungsgrade in Abhängigkeit von der Größe q des Grundkörpers. Für die Gruppen

$$M_{11}, M_{12}, J_1, M_{22}, J_2, M_{23}, HS, J_3, M_{24}, McL$$

Tabelle 2. Lange Bahnen für Gruppen in nicht-definierender Charakteristik

G	Out	d	q
$\mathrm{L}_2(7)$		3	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_7], q \leq 163$
$2.\mathrm{L}_2(7)$		4	$q = 9, 11$
$\mathrm{L}_2(11)$		5	$q = 3, 4, 5$
$2.\mathrm{L}_2(11)$		6	$q = 3$
$\mathrm{L}_2(13)$		6	$q = 4$
$2.\mathrm{L}_2(13)$		6	$q = 3$
$\mathrm{L}_2(17)$		8	$q = 2$
$2.\mathrm{L}_3(4)$	2^2	6	$q = 3$
$4_1.\mathrm{L}_3(4)$	2_3	8	$q = 5$
$4_2.\mathrm{L}_3(4)$	2_2	4	$q = 9$
$6.\mathrm{L}_3(4)$	2_1	6	$q = 7$
$4_2.\mathrm{L}_3(4).2_1$	2^2	8	$q = 3$
$4_2.\mathrm{L}_3(4).2_3$	2^2	8	$q = 3$
$\mathrm{U}_3(3)$	2	6	$q = 2$
$\mathrm{U}_3(3)$		6	$q = 5$
$\mathrm{U}_3(3)$	2	7	$q = 5$
$3_1.\mathrm{U}_4(3)$	2_2	6	$q = 4$
$6_1.\mathrm{U}_4(3)$	2_2	6	$q = 7, 13, 19, 25, 31, 37$
$\mathrm{U}_5(2)$	2	10	$q = 3$
$\mathrm{U}_5(2)$		10	$q = 5$
$\mathrm{S}_4(3)$		5	$q = 7, 13, 19, 25$
$\mathrm{S}_4(3)$	2	6	$q = 5, 7$
$2.\mathrm{S}_4(3)$		4	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[z_3, b_{27}], q \leq 157$
$2.\mathrm{S}_4(3).2$		8	$q = 5$
$\mathrm{S}_4(5)$		12	$q = 4$
$\mathrm{S}_4(7)$		24	$q = 2$
$\mathrm{S}_6(2)$		7	$q = 3, 5, 7, 11$
$2.\mathrm{S}_6(2)$		8	$q = 3, 5, 7$
$\mathrm{S}_6(3)$		13	$q = 4, 7$
$2.\mathrm{O}_8^+(2)$	2	8	$q = 3, 5, 7, 11, 13, 17$
$2.G_2(4)$	2	12	$q = 3$
$2.G_2(4)$		12	$q = 5$

Tabelle 3. Lange Bahnen für sporadische Gruppen

G	Out	d	q
M_{11}		5	3
$2.M_{12}$		6	3
$2.M_{12}$	2	10	3
M_{22}	2	10	2
$3.M_{22}$		6	4
M_{23}		11	2
M_{24}		11	2
$3.J_3$		9	4

G	Out	d	q
J_2		6	4
$2.J_2$		6	5, 9, 11, 19
$J_2.2$		12	2
$2.J_2.2$		6	25
$2.J_2.2$		12	3
$2.Suz$	2	12	3
$3.Suz$		12	4
$6.Suz$		12	7

sind alle Brauer-Charaktere im modularen Atlas [12] enthalten, und die nach obigen Überlegungen noch verbleibenden Darstellungen auf der Web-Seite [23] verfügbar. Direkte Rechnung mit GAP [4] führt auf die Fälle in Tabelle 3. Für die 6-dimensionale Darstellung von $2.J_2$ in Charakteristik $p \geq 11$ haben wir zudem die Ergebnisse von Köhler–Pahlings [14, 4.12] verwendet, der 21-dimensionale $\mathbb{F}_3G$-Modul für $G = McL.2$ ist orthogonal und kann durch Anmerkung 3.1 ausgeschlossen werden. Damit bleiben noch die Fälle

$$(F^*(G), d, q) \in \{(Ru, 28, 2), (2.Suz, 12, 3), (3.Suz, 12, 4), (6.Suz, 12, \{7, 13\}),\\ (Co_3, 22, \{2, 3\}), (Co_2, 22, 2), (Co_2, 23, 3), (Co_1, 24, 2), (2.Co_1, 24, \{3, 5\})\}.$$

(Die 27-dimensionalen Darstellungen für $F^*(G) = 3.Fi_{22}$ sind erst über $\mathbb{F}_4$ definiert.) Für $(2.Suz, 12, 3), (3.Suz, 12, 4), (Co_3, 22, 2), (Co_2, 22, 2)$ liefert direkte Rechnung die behauptete Aussage. Die Bahnen von Co_1 auf dem 24-dimensionalen $\mathbb{F}_2$-Modul sind laut Atlas [3, S.180] zu kurz. Die Moduln zu $(Ru, 28, 2), (Co_3, 22, 3), (Co_2, 23, 3)$ und $(2.Co_1, 24, 3)$ sind orthogonal und können mit Anmerkung 3.1 abgehandelt werden. Der Fall $(6.Suz, 12, 7)$ wird in Lemma 3.5 geklärt. Damit bleiben nur die in (iii) aufgeführten Darstellungen $(6.Suz, 12, 13)$ und $(2.Co_1, 24, 5)$.

Für Darstellungen von Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik verwenden wir die unteren Schranken von Landazuri-Seitz und Verbesserungen davon (siehe etwa Tiep [22]), wodurch mit obiger Ungleichung nur die Gruppen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_2(q)\ (5 \leq q \leq 31), \mathrm{L}_3(3), \mathrm{L}_3(4), \mathrm{L}_4(2), \mathrm{L}_4(3),\\
&\mathrm{U}_3(3), \mathrm{U}_3(4), \mathrm{U}_3(5), \mathrm{U}_4(2), \mathrm{U}_4(3), \mathrm{U}_5(2), \mathrm{U}_6(2),\\
&\mathrm{S}_4(5), \mathrm{S}_4(7), \mathrm{S}_6(2), \mathrm{S}_6(3), \mathrm{S}_8(3), \mathrm{O}_7(3), \mathrm{O}_8^+(2),\\
&G_2(3), G_2(4), {}^2B_2(8)
\end{aligned}$$

in Frage kommen. Für all diese Gruppen sind sämtliche kleinen Darstellungen bekannt (siehe etwa [10]) und zum großen Teil im Web-Atlas [23] verfügbar. Wir führen beispielhaft den außergewöhnlich aufwendigen Fall $S = \mathrm{L}_3(4)$ vor. Nach unserer Gradschranke und dem modularen Atlas [12] bleiben nur folgende Fälle:

G	Out	d	q
$2.\mathrm{L}_3(4)$	2^2	6	3
$4_1.\mathrm{L}_3(4)$	2_3	8	5
$4_2.\mathrm{L}_3(4)$	2_2	4	9
$4_2.\mathrm{L}_3(4).2_1$	2^2	8	3
$4_2.\mathrm{L}_3(4).2_3$	2^2	8	3
$6.\mathrm{L}_3(4)$	2_1	6	7, 13, 19

Explizite Rechnung mit den Darstellungen in GAP zeigt, dass hiervon nur die 6-dimensionale Darstellung von $6.\mathrm{L}_3(4)$ in Charakteristik $q = 13, 19$ keine lange Bahn besitzen. Ähnlich können die meisten anderen Gruppen abgehandelt werden.

Einige der größten Darstellungen verschließen sich (noch) der Untersuchung mit dem Computer. Dabei handelt es sich um die 8-dimensionale Darstellung von $2.\mathrm{O}_8^+(2)$

über $\mathbb{F}_{17}, \mathbb{F}_{19}, \mathbb{F}_{23}$, die 12-dimensionale Darstellung von $2.G_2(4).2$ über $\mathbb{F}_7$, die 13-dimensionale Darstellung von $\mathrm{S}_6(3)$ über $\mathbb{F}_7$ und die 21-dimensionale Darstellung von $\mathrm{U}_6(2)$ über $\mathbb{F}_3$. Letztere ist orthogonal und wird durch Anmerkung 3.1 ausgeschlossen. Die Gruppe $2.G_2(4).2$ hat keine langen Bahnen auf $\mathbb{F}_7^{12}$ nach Lemma 3.5(b). Die maximalen Bahnlängen von $2.\mathrm{O}_8^+(2)$ in der natürlichen Spiegelungsdarstellung wurden in [14, 4.11] bestimmt. Insbesondere gibt es eine lange Bahn genau in Charakteristik $p \leq 17$. Aus der Charaktertafel sieht man, dass $2.\mathrm{O}_8^+(2).2$ ebenso viele Bahnen wie $2.\mathrm{O}_8^+(2)$ und damit auch dieselben Bahnlängen in der Spiegelungsdarstellung hat. In der 13-dimensionalen Darstellung von $\mathrm{S}_6(3)$ über $\mathbb{F}_7$ findet man durch Zufallssuche auf dem Computer schnell einen Vektor mit Fixgruppe der Ordnung 2, und damit eine lange Bahn.

Schließlich sind noch die alternierenden Gruppen $S \cong \mathfrak{A}_n$, $n \geq 7$, zu untersuchen. Mit $R_n(2)$ bezeichnen wir die modularen Konstituenten derjenigen irreduziblen komplexen Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$, die durch Partitionen von n mit einem Teil der Länge mindestens $n-2$ oder dazu konjugierten Partitionen parametrisiert werden. Ihre Grade sind durch Resultate von James explizit bekannt (siehe Magaard–Malle [19, Abschnitt 2]). Wir betrachten zunächst den Fall ungerader Charakteristik $p \neq 2$. Nach [19, Prop. 2.2] haben irreduzible treue Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ über Körpern ungerader Ordnung für $n \geq 13$ entweder mindestens den Grad $(n-2)(n-3)$ oder sie liegen in $R_n(2)$. Bis $n = 12$ sind alle Brauer-Charaktertafeln von $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{S}_n$ im modularen Atlas [12] enthalten, und es zeigt sich, dass keine weiteren Kandidaten auftreten. Für das Herz der Permutationsdarstellung lassen sich leicht untere Schranken für die Fixgruppen beliebiger Vektoren angeben und damit die Bahnlängen nach oben beschränken. Die übrigen Darstellungen in $R_n(2)$ haben mindestens den Grad $(n^2-5n+2)/2$; nach obiger Ungleichung können sie daher in ungerader Charakteristik allenfalls für $n \leq 7$ zu Beispielen führen. Geeignete Schranken für treue Darstellungen der zweifachen Überlagerung $2.\mathfrak{A}_n$ sind wiederum in [19, Prop. 2.3] zusammengestellt, kleine n können mit [10, Abschnitt 3.1] abgehandelt werden.

Über $\mathbb{F}_2$ haben Darstellungen außerhalb von $R_n(2)$ nach [19, Prop. 2.2] mindestens den Grad 126 für $n = 15, 16$ bzw. $(n-2)(n-3)$ ab $n = 17$. Für die kleineren Werte von n finden sich alle relevanten Charaktergrade in [10, Abschnitt 3.1]. Beispielsweise könnte für $\mathfrak{A}_{13}$ die Spin-Darstellung vom Grad 32 über $\mathbb{F}_2$ eine lange Bahn besitzen, aber diese Darstellung ist erst über $\mathbb{F}_4$ definiert. Ähnlich schließt man die restlichen Fälle aus. □

Lemma 3.5.

(a) *Die Gruppe* $6.Suz$ *hat in ihren 12-dimensionalen treuen Darstellungen auf* $V = \mathbb{F}_7^{12}$ *folgende Bahnlängen auf* $\mathbb{P}(V)$*:*

$$32.760,\ 2.795.520,\ 56.609.280,\ 59.304.960,\ 679.311.360,$$
$$9.729.720,\ 46.126.080,\ 415.134.720,\ 1.037.836.800.$$

Insbesondere hat $6.Suz$ *in diesen Darstellungen eine lange Bahn.*

(b) *Die Gruppe* $2.G_2(4).2$ *hat in ihren 12-dimensionalen treuen Darstellungen auf* $\mathbb{F}_7^{12}$ *keine lange Bahn.*

Beweis. (a) Mit Anmerkung 3.3 sieht man, dass $G = 6.Suz$ neun Bahnen auf $\mathbb{P}(V)$ hat. Einschränkung des 12-dimensionalen Charakters zeigt, dass die dritte maximale Untergruppe $\mathrm{U}_5(2)$ von Suz eine Gerade in der 12-dimensionalen Darstellung von G fest lässt. Weiter stabilisieren die beiden maximalen Untergruppen M_{11} und $3^5.\mathrm{L}_2(11)$ der fünften maximalen Untergruppe $3^5.M_{11}$ jeweils eine Gerade, während die Einschränkung auf $3^5.M_{11}$ keine linearen Konstituenten hat. Es ist leicht aus der Liste der maximalen Untergruppen von G zu sehen, dass die beiden zuletzt genannten Untergruppen in keinem größeren Stabilisator liegen können. Dies liefert bereits drei Bahnen, deren Punktstabilisatoren durch 11 teilbare Ordnung haben. Untergruppen der Ordnung 11 haben einen 2-dimensionalen Fixraum, und ihr Normalisator hat darauf vier projektive Bahnen. Charaktereinschränkung zeigt, dass auch die maximale Untergruppe $\mathrm{L}_2(11)$ von M_{11} einen 2-dimensionalen Fixraum besitzt. Daher existiert noch eine weitere Bahn, deren Stabilisator mindestens eine $\mathrm{L}_2(11)$ enthält. Alle möglichen Obergruppen operieren entweder fixpunktfrei, oder wurden bereits vorher abgehandelt (mit jeweils 1-dimensionalem Fixraum), daher hat diese vierte Bahn genau den Stabilisator $\mathrm{L}_2(11)$.

Einschränkung der Darstellung zeigt, dass eine der maximalen Untergruppen $3.A_7$ der zweiten maximalen Untergruppe $3_2.U_4(3).2_3$ eine Gerade fest lässt. Dies führt auf eine weitere Bahn der Länge 59304960. Zieht man die Längen der nun bereits gefundenen fünf Bahnen von $|\mathbb{P}(V)|$ ab, so ist der Rest größer als $4(7^{11} - 1)/6$, und somit muss G wie behauptet eine lange Bahn auf $\mathbb{P}(V)$ besitzen.

Der Normalisator einer Untergruppe der Ordnung 7 operiert transitiv auf den Geraden seines 2-dimensionalen Fixraums, daher ist die zuletzt gefundene Bahn die einzige mit durch 7 teilbarer Fixgruppe. Da Elemente der Ordnung 13 und aus der Klasse 5A keine Eigenwerte in $\mathbb{F}_7$ besitzen, und wir auch alle Bahnen mit durch 11 teilbarer Fixgruppe bereits klassifiziert haben, sind alle übrigen Bahnlängen durch 5.7.11.13 teilbar. Durch Zufallssuche mit dem Computer findet man weitere vier Vektoren mit paarweise verschieden langen Bahnen; damit müssen dies die restlichen vier Bahnen sein. Damit ist der Beweis von (a) erbracht.

(b) Eine lange Bahn von $2.G_2(4).2$ auf $\mathbb{F}_7^{12}$ muss notwendig regulär sein; jede solche zerfällt in zwei reguläre Bahnen unter dem Normalteiler $2.G_2(4)$. Es reicht daher einzusehen, dass $2.G_2(4)$ keine reguläre Bahn auf $\mathbb{F}_7^{12}$ besitzt. Da $2.G_2(4)$ Untergruppe von $6.Suz$ ist und die 12-dimensionalen Darstellungen der letzteren Gruppe irreduzibel auf $2.G_2(4)$ einschränken, können wir hierzu die vorherigen Ergebnisse heranziehen. Bestimmung der Bahnlängen von geeigneten Vektoren in den $6.Suz$-Bahnen zeigt, dass keine der 45 Bahnen von $2.G_2(4)$ regulär ist. □

4. Definierende Charakteristik

Wir wenden uns nun Darstellungen von Gruppen vom Lie-Typ in ihrer definierenden Charakteristik zu. Nach der bekannten Theorie von Steinberg erhält man die Darstellungen in definierender Charakteristik durch Einschränken irreduzibler Darstellungen einer zugehörigen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ über dem algebraischen Abschluss des Grundkörpers. Letztere sind sogenannten Höchstgewichtsmoduln, werden also durch gewisse Gewichte von $\mathbf{G}$ parametrisiert. Für unsere Frage interessant ist folgende Beobachtung, die auch für Bahnenanzahlen einen Zusammenhang zur

Situation über dem algebraischen Abschluss herstellt, und die etwa in Guralnick–Liebeck–Macpherson–Seitz [7, Lemma 2.10] bewiesen wird:

Lemma 4.1. *Sei* $\mathbf{V}$ *ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem algebraischen Abschluss* $\overline{\mathbb{F}_q}$ *eines endlichen Körpers,* F *der Frobeniusendomorphismus auf* $\mathbf{V}$ *bezüglich einer* $\mathbb{F}_q$*-rationalen Struktur und* $\mathbf{G}$ *eine abgeschlossene zusammenhängende* F*-stabile Untergruppe von* $\mathrm{SL}(\mathbf{V})$*. Für* $e \geq 1$ *bezeichne* $G(q^e)$ *die endliche Fixgruppe von* $\mathbf{G}$ *unter* F^e*. Dann gilt: Genau dann hat* $\mathbf{G}$ *endlich viele Bahnen auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*, wenn die Bahnenanzahl von* $G(q^e)$ *auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{F^e})$ *für* $e \geq 1$ *nach oben beschränkt ist.*

Diejenigen einfachen algebraischen Gruppen, die eine Darstellung mit endlicher Bahnenanzahl besitzen, wurden in [7] vollständig klassifiziert. Sagen wir wie schon in Abschnitt 3, dass eine Gruppe G eine lange Bahn auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)$ hat, wenn eine der G-Bahnen die Länge mindestens $(q^{d-1}-1)/(q-1)$ besitzt, so erhalten wir also folgende Aussage:

Folgerung 4.2. *Seien* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{V}$*,* F *wie in Lemma 4.1. Hat* $\mathbf{G}$ *nur endlich viele Bahnen auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*, so haben fast alle* $G(q^e)$ *eine lange Bahn auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{F^e})$*.*

Die Umkehrung hiervon gilt leider nicht. Damit zeigt sich, dass die Frage nach langen Bahnen in der bisher betrachteten Form für Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik nicht so natürlich ist, und keine glatte Antwort erwartet werden kann. Die Existenz einer langen Bahn könnte von der Wahl von q abhängen, und unter der Operation der äußeren Automorphismen wird die Situation noch unübersichtlicher. Es scheint hier natürlicher zu fragen, wann die Gruppe $\mathbf{G}$ eine Bahn der Kodimension höchstens 1 auf $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ besitzt. Damit besteht zumindest noch folgender Zusammenhang zur Existenz langer Bahnen:

Lemma 4.3. *Seien* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{V}$*,* F *wie in Lemma 4.1 und* q *fest. Hat* $G(q^e)$ *für unendlich viele* $e \geq 1$ *eine lange Bahn auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V}^{F^e})$*, so besitzt* $\mathbf{G}$ *eine Bahn der Kodimension höchstens 1 auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*.*

Beweis. Seien v_i, $i \in I$, Vertreter der Bahnen von $\mathbf{G}$ auf $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ und $\mathbf{C}_i := C_{\mathbf{G}}(v_i)^\circ$ die Einskomponenten der zugehörigen Stabilisatoren. Ist v_i fest unter F^e, so enthält der Stabilisator von v_i in $G(q^e)$ jedenfalls $\mathbf{C}_i^{F^e}$. Die Ordnung von $\mathbf{C}_i^F$ ist ein Polynom in q vom Grad $\dim \mathbf{C}_i$, welches das Ordnungspolynom von $G(q)$ teilt. Da dieses nur endlich viele Teiler (im Polynomring) besitzt, werden die Stabilisatorordnungen durch endlich viele Polynome vom Grad mindestens $\min_{i \in I} \dim \mathbf{C}_i$ nach unten abgeschätzt.

Haben nun alle Bahnen eine Dimension kleiner als $d-2$, $d := \dim \mathbf{V}$, so erhalten wir als obere Schranken für die Bahnlängen endlich viele Polynome vom Grad höchstens $d-3$. Dies widerspricht der Annahme, dass für unendlich viele Potenzen q^e eine Bahn der Länge mindestens $(q^{e(d-1)}-1)/(q^e-1)$ existiert. □

Anmerkung 4.4. Man beachte, dass mit diesem Lemma nicht alle absolut irreduziblen Moduln mit langen Bahnen für endliche quasi-einfache Gruppen vom Lie-Typ in definierender Charakteristik erfasst sind. Einerseits könnte es sein, dass der betrachtete Modul für $\mathbf{G}$ bereits über einem kleineren Körper als $\mathbb{F}_q$ definiert ist und dort eine lange Bahn besitzt. Dies geschieht etwa für den $\mathrm{SL}_2(q^3)$-Modul mit höchstem Gewicht $(1+q+q^2)\lambda_1$, der über $\mathbb{F}_q$ definiert ist und dort eine lange Bahn besitzt.

Andererseits sind die obigen Überlegungen nicht auf getwistete Gruppen anwendbar. Beispielsweise ist die 8-dimensionale Spin-Darstellung von $\mathrm{Spin}_8^-(q)$ erst über $\mathbb{F}_{q^2}$ definiert. Dort besitzt sie eine lange Bahn, was aber nicht aus den obigen Resultaten folgt.

Wir werden uns hier trotzdem darauf beschränken, die einfachen algebraischen Gruppen $\mathbf{G}$ mit einer Bahn der Dimension mindestens $\dim \mathbf{V} - 2$ auf $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ zu klassifizieren.

Zunächst behandeln wir die adjungierten Darstellungen (ich danke T. Springer für den Literaturverweis):

Bemerkung 4.5. *Sei $\mathbf{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, $\mathbf{L}$ die Lie-Algebra von $\mathbf{G}$. Dann gilt für alle $v \in \mathbf{L}$: $\dim C_{\mathbf{G}}(v) \geq \mathrm{Rg}(\mathbf{G})$.*

Beweis. Sei $v = v_s v_n$ die Jordanzerlegung von $v \in \mathbf{L}$. Dann ist $\mathbf{C} := C_{\mathbf{G}}(v_s)$ eine reduktive Gruppe vom selben Rang wie $\mathbf{G}$. Nach Springer [21, Prop. 5.6] hat nun $C_{\mathbf{G}}(v) = C_{\mathbf{C}}(v_n)$ mindestens die Dimension $\mathrm{Rg}(\mathbf{C})$. □

Damit können wir unsere Frage für die adjungierten Darstellungen beantworten:

Lemma 4.6. *Seien $\mathbf{G}$ eine einfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe über $\overline{\mathbb{F}_q}$ und $\mathbf{L}$ die Lie-Algebra von $\mathbf{G}$. Sei weiter $\mathbf{V} = [\mathbf{L},\mathbf{L}]Z(\mathbf{L})/Z(\mathbf{L})$ der nichttriviale Anteil der Lie-Algebra unter der adjungierten Operation von $\mathbf{G}$. Hat $\mathbf{G}$ eine Bahn der Kodimension höchstens 1 auf $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, so gilt eines von:*

(i) *$\mathbf{V}$ ist reduzibel, oder*
(ii) *$(\mathbf{G}, p) \in \{(\mathrm{SL}_3, p), (\mathrm{SL}_4, 2), (\mathrm{Sp}_4, p), (\mathrm{Sp}_6, p), (\mathrm{SO}_7, p), (\mathrm{SO}_8, 2), (G_2, p)\}$.*

Beweis. Sei $v \in \mathbf{L}$. Nach Bemerkung 4.5 hat der Zentralisator $\mathbf{C} := C_{\mathbf{G}}(v)$ mindestens die Dimension $r := \mathrm{Rg}(\mathbf{G})$. Die Zusammenhangskomponente $\mathbf{C}^\circ$ ist demnach eine zusammenhängende Untergruppe von $\mathbf{G}$ der Dimension mindestens r, somit hat die Bahn von v höchstens die Dimension $\dim \mathbf{G} - r$. Damit diese mindestens gleich $\dim \mathbf{V} - 2$ wird, muss jedenfalls

$$\dim(\mathbf{G}) - (r-1) \geq \dim(\mathbf{G}) - 1 - \delta$$

mit $\delta := \dim(\mathbf{G}) - \dim(\mathbf{V}) \in \{0, 1, 2\}$ sein, also $r \leq 2 + \delta$.

Umgekehrt existieren immer reguläre Elemente in der Lie-Algebra, also Elemente, welche nur von einem maximalen Torus zentralisiert werden.

Genaue Untersuchung der endlich vielen Fälle vom Rang $r \leq 4$ führt nun auf die in (ii) angegebenen Ausnahmen. □

Wir benötigen noch eine Beschreibung der niedrigdimensionalen Darstellungen einfacher algebraischer Gruppen (siehe hierzu etwa Lübeck [18]):

Lemma 4.7. *Seien $\mathbf{G}$ eine einfache algebraische Gruppe in Charakteristik p und $\mathbf{V}$ ein nichttrivialer rationaler irreduzibler $\overline{\mathbb{F}_p}\mathbf{G}$-Modul mit $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{G} + 2$, mit höchstem Gewicht λ. Dann gilt (bis auf Frobenius-Twists und Dualität) eines von:*

(i) $\mathbf{V}$ *ist ein Konstituent der adjungierten Darstellung von* $\mathbf{G}$, *oder*
(ii) $(\mathbf{G}, \lambda)$ *kommen in Tabelle 4 vor, oder*
(iii) $(\mathbf{G}, \lambda, p) \in \{(\mathrm{SL}_2, 4\lambda_1, p), (\mathrm{SL}_3, 3\lambda_1, p), (\mathrm{Sp}_4, \lambda_1+\lambda_2, 5), (\mathrm{Sp}_{2n}, \lambda_2, p)\}$.

Satz 4.8. *Sei* $\mathbf{G}$ *eine einfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe über* $\overline{\mathbb{F}_p}$ *und* $\mathbf{V}$ *ein nichttrivialer rationaler absolut irreduzibler* $\overline{\mathbb{F}_p}\mathbf{G}$*-Modul der Dimension* $d := \dim \mathbf{V}$. *Genau dann hat* $\mathbf{G}$ *eine Bahn der Kodimension höchstens 1 auf* $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, *wenn* $(\mathbf{G}, \mathbf{V}, p)$ *(bis auf Frobenius-Twists und Dualität) wie in Tabelle 4 angegeben sind. Umgekehrt existiert in allen Fällen der Tabelle 4 eine Bahn der Kodimension 1, bis auf höchstens den Fall* $(\mathbf{G}, \lambda, p) = (\mathrm{Sp}_4, \lambda_1+\lambda_2, 5)$.

Tabelle 4. Bahnen der Kodimension 1 in definierender Charakteristik

$\mathbf{G}$	λ	d	Bedingungen	Referenz
SL_n	λ_1	n		[7]
SL_n	λ_2	$\binom{n}{2}$	$n \geq 4$	[7]
SL_n	$2\lambda_1$	$\binom{n+1}{2}$	$p > 2$	[7]
SL_n	$(1+p^i)\lambda_1$	n^2		[7]
SL_n	$\lambda_1 + p^i\lambda_{n-1}$	n^2		[7]
SL_n	$3\lambda_1$	$\binom{n+2}{3}$	$n \leq 3, p > 3$	[7], Satz 4.8
SL_2	$4\lambda_1$	5	$p > 3$	Satz 4.8
SL_3	$\lambda_1+\lambda_2$	$8-\delta_{p,3}$		Lemma 4.6
SL_4	$\lambda_1+\lambda_3$	14	$p = 2$	Lemma 4.6
SL_4	$\lambda_1+\lambda_2$	16	$p = 3$	[7]
SL_n	λ_3	$\binom{n}{3}$	$n = 6, 7, 8$	[7]
SO_{2n+1}	λ_1	$2n+1$	$n \geq 2, p > 2$	[7]
SO_7	λ_2	21	$p > 2$	Lemma 4.6
SO_{2n+1}	λ_n	2^n	$2 \leq n \leq 6$	[7, 13]
Sp_{2n}	λ_1	$2n$	$n \geq 3$	[7]
Sp_4	$\lambda_1+\lambda_2$	12	$p = 5$	
Sp_6	λ_2	$14-\delta_{p,3}$		[7, 5]
Sp_6	λ_3	14		[7]
Sp_{2n}	$2\lambda_1$	$\binom{2n+1}{2}$	$n \leq 3, p > 2$	Lemma 4.6
SO_{2n}	λ_1	$2n$	$n \geq 4$	[7]
SO_8	λ_2	26	$p = 2$	Lemma 4.6
SO_{2n}	λ_{n-1}, λ_n	2^{n-1}	$4 \leq n \leq 7$	[7]
G_2	λ_2	$7-\delta_{p,2}$		[7]
G_2	λ_1	14	$p \neq 3$	Lemma 4.6
F_4	λ_4	$26-\delta_{p,3}$		[2, 7]
E_6	λ_1, λ_6	27		[7]
E_7	λ_7	56		[7]

Beweis. Die maximale Bahnlänge wird erreicht für Vektoren mit trivialer Fixgruppe; in diesem Fall hat die Bahn Dimension $\dim \mathbf{G}$. Damit muss für die gesuchten Darstellungen jedenfalls $\dim \mathbf{V} \leq \dim \mathbf{G} + 2$ gelten. Alle solchen Darstellungen wurden in Lemma 4.7 bestimmt.

Die Konstituenten der adjungierten Darstellung haben wir bereits in Lemma 4.6 untersucht. Diejenigen Fälle, in denen $\mathbf{G}$ nur endlich viele Bahnen auf $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ hat, also insbesondere eine dichte Bahn, wurden in [7] klassifiziert, sie sind in Tabelle 4 entsprechend gekennzeichnet.

Die Spin-Darstellung von SO_{13} enthält eine Bahn der Kodimension 1 nach [13], in der 25- bzw. 26-dimensionalen Darstellung von F_4 gibt es eine solche Bahn nach [2]. Die vierte symmetrische Potenz der natürlichen Darstellung von SL_2 (dies sind gerade die homogenen Polynome vom Grad 4 in zwei Variablen) enthält Elemente mit endlicher Fixgruppe und somit ebenfalls eine Bahn der Kodimension 1; dasselbe gilt für die dritte symmetrische Potenz der natürlichen Darstellung von SL_3.

Die minimalen Stabilisatoren in der Darstellung von Sp_{2n} mit höchstem Gewicht λ_2 haben nach [5] die Dimension $3n$, somit kann es für $n > 3$ keine Bahn der Kodimension 1 geben. Für $n = 3$ existieren nach [7, Lemma 2.4] Vektoren mit Fixgruppe SL_2^3, also auch Bahnen der Kodimension 1. Der Fall $n = 2$ führt auf die natürliche Darstellung von SO_5. □

5. Wenige Bahnen

Wir verwenden nun die vorhergehenden Ergebnisse, um Moduln mit wenigen Bahnen in nicht-definierender Charakteristik zu klassifizieren. Dabei sagen wir, dass eine lineare Gruppe $G \leq \mathrm{GL}(V)$ *wenige Bahnen auf* $\mathbb{P}(V)$ hat, wenn sie dort weniger als q Bahnen besitzt, wobei V über $\mathbb{F}_q$ definiert sein soll. Man beachte, dass diese Bedingung für 2-dimensionale nicht-triviale Darstellungen immer erfüllt ist. Es stellt sich heraus, dass dies im Bereich der quasi-einfachen Gruppen, die nicht vom Lie-Typ in definierender Charakteristik sind, die einzige unendliche Beispielserie liefert.

Satz 5.1. *Sei G eine endliche Gruppe mit quasi-einfacher verallgemeinerter Fitting-Untergruppe $F^*(G)$, und sei $V \cong \mathbb{F}_q^d$ ein absolut irreduzibler treuer $\mathbb{F}_qG$-Modul, der über keinem echten Teilkörper von $\mathbb{F}_q$ definierbar ist. Hat G weniger als q Bahnen auf $\mathbb{P}(V)$, so gilt eines von:*

(i) *G ist vom Lie-Typ in Charakteristik $p|q$, oder*
(ii) *$d \leq 12$ und (G, d, q) sind wie in Tabelle 5 angegeben.*

Beweis. Hat $G \leq \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ höchstens $q-1$ Bahnen auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)$, so muss mindestens eine davon mindestens die Länge

$$\frac{|\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)|}{q-1} = \frac{q^d-1}{(q-1)^2} \geq \frac{q^{d-1}-1}{q-1}$$

besitzen. Dies ist nach unserer früheren Definition eine lange Bahn. Erfüllen also G, V die Voraussetzungen des Satzes, so sind wir in einem der Fälle in Satz 3.4. Zum Beweis müssen wir daher nur die dort aufgeführten Gruppen und Moduln durchgehen. Dies wird durch die Anmerkungen 3.1 und 3.2 noch erleichtert: diese machen (vor allem bei großem q) eine explizite Rechnung in dem Modul überflüssig. Komplementär dazu können für kleine q zahlentheoretische Argumente herangezogen werden. Für $q = 2$ erzwingt unsere Bedingung transitive Operation auf $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^d)$, insbesondere teilt $|\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^d)|$ die Gruppenordnung $|G|$. Allgemeiner muss $|\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)| = \sum_{i=1}^r b_i$

Tabelle 5. Wenige Bahnen für nahezu einfache Gruppen

G	Out	d	$(q : \lvert\mathbb{P}(V)/G\rvert)$
$\mathfrak{A}_5$		3	$(9:5), (11:7), (19:13), (29:23), (31:27)$
$2.\mathfrak{A}_5$		2	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_5]$
$2.\mathfrak{A}_5.2$		4	$(3:2)$
$2.\mathfrak{A}_6$		4	$(5:3), (7:4), (11:7)$
$3.\mathfrak{A}_6$		3	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_5], q \leq 289$
$2.\mathfrak{A}_6.2_1$		4	$(7:3), (11:4), (13:10), (19:15), (23:20)$
$3.\mathfrak{A}_6.2_3$		3	$(25:5)$
$\mathfrak{A}_7$		4	$(2:1)$
$2.\mathfrak{A}_7$		4	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_7], q \leq 43$
$3.\mathfrak{A}_7$		3	$(25:3)$
$2.\mathfrak{A}_7.2$		4	$(7:2)$
$\mathrm{L}_2(7)$		3	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[b_7], q \leq 137$
$2.\mathrm{L}_2(13)$		6	$(3:1)$
$\mathrm{U}_3(3)$	2	6	$(2:1)$
$2.\mathrm{L}_3(4).2_3$	2^2	4	$(3:2)$
$4_2.\mathrm{L}_3(4)$	2_2	4	$(9:3)$
$2.\mathrm{S}_4(3)$		4	$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[z_3, b_{27}], q \leq 109$
$3_1.\mathrm{U}_4(3)$	2_2	6	$(4:3)$
$6_1.\mathrm{U}_4(3)$	2_2	6	$(7:6)$
$2.G_2(4)$	2	12	$(3:2)$
M_{11}		5	$(3:2)$
$3.M_{22}$		6	$(4:3)$
J_2		6	$(4:2)$
$2.J_2$		6	$(9:4), (5:2), (11:4), (19:13)$
$3.J_3$		9	$(4:3)$
$2.Suz$	2	12	$(3:2)$

sein mit $r \leq q-1$ Teilern $b_i \in \mathbb{N}$ von $|G|$. Dies führt zum Beispiel im Fall $q = 3$ fast immer zum erwünschten Widerspruch. □

Im Fall von höchstens zwei Bahnen (also insbesondere für $q \leq 3$) erhalten wir die alten Resultate von Hering [8] und Liebeck [16].

Wir kehren nun zu der in der Einleitung aufgeworfenen Frage nach Bahnen in koprimer Operation zurück.

Folgerung 5.2. *Sei G eine endliche Gruppe mit quasi-einfacher verallgemeinerter Fitting-Untergruppe $F^*(G)$, und sei $V \cong \mathbb{F}_q^d$ ein absolut irreduzibler, treuer $\mathbb{F}_qG$-Modul mit $\mathrm{ggT}(q, |G|) = 1$, der über keinem echten Teilkörper von $\mathbb{F}_q$ definierbar ist. Dann gilt eines von:*

(i) *G hat mindestens $2\sqrt{p-1}$ Bahnen auf $\mathbb{P}(V)$, wobei $q = p^a$, oder*
(ii) *$d \leq 6$ und (G, d, q) sind wie in Tabelle 6 angegeben.*

Tabelle 6. Wenige Bahnen bei koprimer Operation

G	d	$(q : \lvert\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^d)/G\rvert)$
$2.\mathfrak{A}_5$	2	$p \leq 14159$ für $p \equiv \pm 1 \pmod 5$
		$(7^2 : 2), (13^2 : 4), (17^2 : 6)$
$2.\mathfrak{A}_6$	4	$(7 : 4)$
$3.\mathfrak{A}_6$	3	$(19 : 5), (31 : 9)$
$2.\mathfrak{A}_6.2_1$	4	$(7 : 3), (11 : 4)$
$2.\mathfrak{A}_7$	4	$(11 : 3), (23 : 8)$
$\mathrm{L}_2(7)$	3	$(11 : 3), (23 : 7)$
$2.\mathrm{S}_4(3)$	4	$(7 : 2), (13 : 4), (19 : 5), (31 : 9)$
$2.J_2$	6	$(11 : 4)$

Beweis. Offensichtlich gilt für alle $q = p^a \geq 2$ die Ungleichung $2\sqrt{p-1} \leq q$. Gruppen G mit Moduln wie in der Voraussetzung, die nicht (i) erfüllen, sind demnach wie in Satz 5.1(i) oder (ii) beschrieben. Die erste Alternative wird durch die teilerfremde Operation ausgeschlossen. Mit der vorausgesetzten Ungleichung für die Bahnenanzahl können die Fälle in Tabelle 5 schnell untersucht werden. Für die 2-dimensionale Darstellung von $2.\mathfrak{A}_5$ erhält man etwa für $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ aus der Cauchy-Frobenius-Formel die Bahnenanzahl

$$\frac{p+1}{60} + \frac{1}{2}\delta_4 + \frac{2}{3}\delta_3 + \frac{4}{5}\delta_5, \qquad \text{mit} \quad \delta_r := \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$. Dies ist kleiner als $2\sqrt{p-1}$ für alle Primzahlen $p \leq 14159$. Für ungerade Primzahlen $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ ist die 2-dimensionale Darstellung über $\mathbb{F}_{p^2}$ definiert und die Bahnenanzahl ergibt sich hier zu $(p^2 + 71)/60$. □

Folgerung 5.3. *Sei H semidirektes Produkt einer Gruppe G mit quasi-einfacher verallgemeinerter Fitting-Untergruppe $F^*(G)$ mit einem irreduziblen $\mathbb{F}_pG$-Modul, wobei $p \nmid |G|$. Dann hat H mindestens $2\sqrt{p-1}$ Konjugiertenklassen.*

Beweis. Man verifiziert leicht, dass auch in den Ausnahmefällen der Folgerung 5.2(ii) die entsprechenden semidirekten Produkte von V mit $G \circ Z$, $Z \leq \mathbb{F}_q^\times$, mindestens $2\sqrt{p-1}$ Konjugiertenklassen besitzen, also keine Gegenbeispiele zu einer Verallgemeinerung des Hauptresultats von [9] auf nichtauflösbare Gruppen darstellen. □

6. Klassische Bahnen

Die bisherigen Resultate erlauben auch, diejenigen quasi-einfachen Gruppen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ zu bestimmen, die auf $\mathbb{P}(V)$ dieselbe Bahnenanzahl (also dieselben Bahnen) wie eine umfassende klassische Gruppe $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GU}(V)$, $\mathrm{Sp}(V)$ oder $\mathrm{GO}(V)$ besitzen. Da klassische Gruppen auf ihrem natürlichen Modul immer eine lange Bahn haben, handelt es sich hierbei um Darstellungen wie in Satz 3.4(i) oder (ii). Da $\mathbb{P}(V)$ unter klassischen Gruppen in höchstens drei Bahnen zerfällt, erfüllen diese Darstellungen über Körpern $\mathbb{F}_q$ mit $q \geq 4$ zudem noch Satz 5.1(i) oder (ii).

Satz 6.1. *Seien G eine endliche Gruppe mit quasi-einfacher verallgemeinerter Fitting-Untergruppe und V ein absolut irreduzibler nichttrivialer $\mathbb{F}_qG$-Modul. Hat G dieselben Bahnen auf $\mathbb{P}(V)$ wie eine umfassende klassische Gruppe*

$$\mathrm{Cl}(V) \in \{\mathrm{SL}(V), \mathrm{SU}(V), \mathrm{Sp}(V), \mathrm{SO}(V)\},$$

so ist $F^*(G)$ vom Lie-Typ in definierender Charakteristik, oder $(G, \mathrm{Cl}(V))$ sind wie in Tabelle 7 angegeben.

Tabelle 7. Klassische Bahnen

G	$\mathrm{Cl}(V)$	Bemerkung
$2.\mathfrak{A}_5$	$\mathrm{SL}_2(q), q \in \{9, 11, 19, 29, 59\}$	
$\mathfrak{A}_6$	$\mathrm{Sp}_4(2)$	$\mathrm{Sp}_4(2)'$
$\mathfrak{A}_7$	$\mathrm{SL}_4(2)$	
$\mathfrak{A}_9$	$\mathrm{SO}_8^+(2)$	
$2.\mathrm{L}_2(13)$	$\mathrm{Sp}_6(3)$	
$2.\mathrm{L}_3(4).2_1$	$\mathrm{SO}_6^-(3)$	
$\mathrm{U}_3(3)$	$\mathrm{Sp}_6(2)$	$G_2(2)'$

Ein allgemeineres Resultat, das auch den Fall definierender Charakteristik enthält, wurde schon von Liebeck [17] bewiesen. Dort wurde allerdings $\dim V \geq 8$ für $p = 2$, $\dim V \geq 5$ für $q = 3$ vorausgesetzt und auch der Fall $\mathfrak{A}_9 < \mathrm{SO}_8^+(2)$ übersehen.

Danksagung
Ich danke J. Müller und R. Wilson für die Konstruktion einiger Darstellungen von Verzierungen von $\mathrm{L}_3(4)$ sowie von $\mathrm{S}_6(3)$ und M. Neunhöffer für die Bereitstellung eines GAP4-Programms zum schnellen Rechnen in großen Matrixgruppen über endlichen Körpern.

Nachtrag:
Kurz vor Drucklegung des vorliegenden Artikels haben C. Köhler, F. Lübeck, M. Neunhöffer und F. Nöske durch ausgeklügelte Computerrechnungen nachweisen können, dass die beiden in Satz 3.4(ii) offen gelassenen Moduln keine langen Bahnen besitzen.

Literatur

[1] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type.* Wiley-Interscience, New York, 1985.
[2] A. Cohen, B. Cooperstein, The 2-spaces of the standard $E_6(q)$-module. Geom. Dedicata **25** (1988), 467–480.
[3] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, Atlas of Finite Groups. Clarendon Press, Oxford, 1985.
[4] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*; 2004, `http://www.gap-system.org`.
[5] D. Goldstein, R. M. Guralnick, Pairs of alternating forms. Preprint.
[6] D. Goodwin, Regular orbits of linear groups with an application to the $k(GV)$-problem. I, II. J. Algebra **227** (2000), 395–432, 433–473.

[7] R. M. Guralnick, M. W. Liebeck, D. Macpherson, G. M. Seitz, Modules for algebraic groups with finitely many orbits on subspaces. J. Algebra **196** (1997), 211–250.

[8] C. Hering, Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order. II. J. Algebra **93** (1985), 151–164.

[9] L. Héthelyi, B. Külshammer, On the number of conjugacy classes of a finite solvable group. Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 668–672.

[10] G. Hiss, G. Malle, Low-dimensional representations of quasi-simple groups. LMS J. Comput. Math. **4** (2001), 22–63.

[11] C. Jansen, The minimal degrees of faithful representations of the sporadic simple groups and their covering groups. LMS J. Comput. Math. **8** (2005), 122–144.

[12] C. Jansen, K. Lux, R. Parker, R. Wilson, *An Atlas of Brauer Characters.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[13] V. G. Kac, E. Vinberg, Spinors of 13-dimensional space. Adv. Math. **30** (1978), 137–155.

[14] C. Köhler, H. Pahlings, Regular orbits and the $k(GV)$-problem. Pp. 209–228 in: Groups and computation, III (Columbus, OH, 1999), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 8, de Gruyter, Berlin, 2001.

[15] B. Külshammer, Solvable subgroups of p-solvable semilinear groups. J. Reine Angew. Math. **404** (1990), 171–188.

[16] M. W. Liebeck, The affine permutation groups of rank three. Proc. London Math. Soc. **54** (1987), 477–516.

[17] M. W. Liebeck, Characterization of classical groups by orbit sizes on the natural module. Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2961–2966.

[18] F. Lübeck, Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic. LMS J. Comput. Math. **4** (2001), 135–169.

[19] K. Magaard, G. Malle, Irreducibility of alternating and symmetric squares. Manuscripta Math. **95** (1998), 169–180.

[20] L. Pyber, Finite groups have many conjugacy classes. J. London Math. Soc. **46** (1992), 239–249.

[21] T. A. Springer, Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **30** (1966), 115–141.

[22] P.H. Tiep, Low dimensional representations of finite quasisimple groups. Pp. 277–294 in: *Groups, combinatorics & geometry* (Durham, 2001), World Sci. Publishing, 2003.

[23] R. Wilson, P. Walsh, J. Tripp, I. Suleiman, S. Rogers, R. Parker, S. Norton, S. Nickerson, S. Linton, J. Bray, R. Abbott, Atlas of Finite Group Representations. http://web.mat.bham.ac.uk/atlas

Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern, Postfach 3049, D–67653 Kaiserslautern, Germany.

E-mail address: malle@mathematik.uni-kl.de